数理解析研究所講究録
609巻 1987年 154-174

高次元の分岐について

東大理　加藤和也　(Kazuya Kato)

高次元の環やschemeの分岐について，大切と思われる問題や何がしかの結果について述べます．

目次：1．古典的な分岐理論，2．高次元分岐理論の困難，3．Serreの予想，4．類体論，K-理論の可能性，5．1次の表現のswan conductor，6．兵頭の不等式，兵頭の有限性定理，7．Associated differential，8．ℓ進層のRiemann-Roch，$\mathcal{D}$加群との類似，9．特異点の解消，10．補足．

§1．古典的な分岐理論

物事が何もかもうまくいっている古典的な分岐理論をまずここで復習し，次節から，困難が待ちうけている高次元の分岐に話をうつすことにします．

Kを完備離散付値体で，剰余体Fが完全体であるものとす

る．K^{sep} で K の分離閉包，Λ で標数 0 の代数閉体をあらわす．連続表現

$$\rho : \mathrm{Gal}(K^{sep}/K) \to GL_n(\Lambda)$$

（Λ は離散体と見る）に対し，ρ の Artin conductor $\mathrm{art}(\rho) \in \mathbb{Z}$，$\rho$ の Swan conductor $\mathrm{sw}(\rho) \in \mathbb{Z}$ が次のように定義される．ρ が $\mathrm{Gal}(L/K)$ を経由するような K の有限次ガロア拡大 L をとり，関数 $a, s : G = \mathrm{Gal}(L/K) \to \mathbb{Z}$ を，$G \ni \sigma \neq 1$ に対しては

$$a(\sigma) = -f_{L/K} \cdot \inf_{x \in O_L} \mathrm{ord}_L(x - \sigma(x))$$

$$s(\sigma) = -f_{L/K} \cdot \inf_{x \in L^\times} \mathrm{ord}_L\left(1 - \frac{\sigma(x)}{x}\right)$$

（$f_{L/K}$ は L/K の剰余体の拡大次数，O_L は L の付値環，ord_L は L の正規加法付値）とおき，また

$$a(1) = -\sum_{\substack{\sigma \in G \\ \sigma \neq 1}} a(\sigma), \qquad s(1) = -\sum_{\substack{\sigma \in G \\ \sigma \neq 1}} s(\sigma)$$

とおいて定義する．そして

$$\mathrm{art}(\rho) = \frac{1}{[G]} \sum_{\sigma \in G} a(\sigma)\,\mathrm{Tr}(\rho(\sigma))$$

$$\mathrm{sw}(\rho) = \frac{1}{[G]} \sum_{\sigma \in G} s(\sigma)\,\mathrm{Tr}(\rho(\sigma))$$

（$[G]$ は G の位数，$\mathrm{Tr}(\rho(\sigma))$ は $\rho(\sigma)$ の trace）とおく．次の事実は古典的である．（$[S_2]$ 参照．）

<u>定理</u>．(1)　$\mathrm{art}(\rho)$，$\mathrm{sw}(\rho)$ は L のとり方によらない 0 以上の整数である．

(2)　$\mathrm{art}(\rho) \geq \mathrm{sw}(\rho)$ であり，

$\mathrm{art}(\rho) = 0 \iff \rho$ は不分岐（つまり ρ は $\mathrm{Gal}(K^{sep}/K)$ の

だ性群を消す)

$sw(\rho)=0 \iff \rho$ は tame (つまり ρ は $Gal(K^{sep}/K)$ のだせい群の最大の pro-p 部分群をけす).

(2) にあるように $art(\rho)$, $sw(\rho)$ は ρ の分岐の激しさを測るものである. $art(\rho)$ と $sw(\rho)$ の間にはよく知られた簡単な関係がある(省略する).

(1) にある $art(\rho)$, $sw(\rho)$ の正値整数性は, $a, s: G \to \mathbb{Z}$ が或る G の $\underbrace{\text{表現}}_{(\text{有限次})}$ の指標であることを示しており, これらの表現はそれぞれ Artin 表現, Swan 表現と呼ばれる. (実際, 関数 $h: G \to \Lambda$ が G のある $\underbrace{\text{表現}}_{(\text{有限次})}$ の指標であるための必要十分条件は, G の任意の有限次表現 ρ について $\frac{1}{[G]}\sum_{\sigma \in G} h(\sigma)\,Tr(\rho(\sigma^{-1}))$ が 0 以上の整数となることと同値である.)

局所類体論との間には次のような関係がある. K の剰余体 F が有限体である時, 局所類体論によって, ほとんど同型に近い連続準同型

$$K^{\times} \to Gal(K^{ab}/K) \qquad (K^{ab} \text{ は } K \text{ の最大アーベル拡大})$$

が与えられる. ρ が 1 次の表現つまり連続準同型 $Gal(K^{sep}/K) \longrightarrow \Lambda^{\times}$ であるとき, ρ は $Gal(K^{ab}/K)$ を経由するから, $K^{\times} \to \Lambda^{\times}$ を導く. この map も ρ と書く.

<u>定理</u> ([S_1] 参照). F が有限体, ρ が 1 次の表現のとき,

$art(\rho)$ = 「$\rho(U_K^{(i)}) = \{1\}$ となる最小の $i \geq 0$」,

$sw(\rho) =$ 「$\rho(U_K^{(i+1)}) = \{1\}$ となる最小の $i \geq 0$」.
ここに $U_K^{(i)}$ は K の第 i 単数群である.

§2. 高次元の分岐理論の困難.

X を整 scheme, K をその函数体とする. Λ を §1 のとおりとし, 連続表現 $\rho : Gal(K^{sep}/K) \to GL_n(\Lambda)$ が与えられた時, X の各点における ρ の分岐の様子をどのように測るのが適切であるかということが問題になる. Artin conductor や Swan conductor のような良いものがあるであろうか?

古典的な場合, $X = Spec(O_K)$, K は代数体, O_K は K の整数環であるが, X の点 x は (素 ideal (0) を除けば) O_K の極大 ideal と対応し, 局所環 $\mathcal{O}_{X,x}$ の完備化は 剰余体が有限体 (したがって完全体) なる完備離散付値環である. よって §1 の理論が適用され, $art_x(\rho)$, $sw_x(\rho)$ が与えられる.

しかしながら, X を $\mathbb{Z}$ 上有限型の整 scheme とするとき, $\dim(X) \geq 2$ の場合には §1 の理論はほとんど適用できない. まず,

(1) X の余次元 1 の点 x について, X を正規とすると $\mathcal{O}_{X,x}$ は離散付値環であるが, その剰余体は完全体とは限らない. 例えば $X = Spec(\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_r])$, x を, 有理素数 p が生成する

$\mathbb{Z}[T_1,\cdots,T_r]$ の素 ideal に対応する X の点とすると，$\mathcal{O}_{X,x}$ は $\mathbb{F}_p(T_1,\cdots,T_r)$ を剰余体とする離散付値環であるが，剰余体は $r\geqq 1$ なら（つまり $\dim(X)\geqq 2$ なら）完全体ではない．したがって，剰余体が完全体でない完備離散付値体の分岐を考えねばならないことになる．

(2) また，余次元 $\geqq 2$ の点 x について $\mathcal{O}_{X,x}$ は次元 $\geqq 2$ の局所環であるから，§1 にある分岐理論は全く適用できない．

このうちの (1) についてもう少し述べる．今 K を（この節の初めとは異なり）完備離散付値体で剰余体 F が完全体と限らないものとする．この時，$\rho : \mathrm{Gal}(K^{sep}/K) \to GL_n(\Lambda)$ に対し，ρ が $\mathrm{Gal}(L/K)$ を経由する有限次ガロア拡大 L/K をとり，関数 $a, s : G \to \mathbb{Z}$ を §1 のように定義し，$\mathrm{art}(\rho)$，$\mathrm{sw}(\rho)$ もまた §1 のように定義しても，これらの量はうまく働かないのである．こうして定義した $\mathrm{art}(\rho)$，$\mathrm{sw}(\rho)$ は整数とは限らない（したがって，a, s は表現の指標とは限らない）し，また L のとり方にも依存するのである．その上，§1 の古典的な場合には存在する $\mathrm{art}(\rho)$，$\mathrm{sw}(\rho)$ と discriminant の関係も一般には成り立たなくなるのである（§6 参照）．

（F が完全体の時，L/K を有限次分離拡大とし，ρ を $\mathrm{Gal}(K^{sep}/L)$ の単位表現から誘導された $\mathrm{Gal}(K^{sep}/K)$ の $[L:K]$ 次の表現とする時，$\mathrm{art}(\rho)$ は，L/K の discriminant ideal

([S_1] Ch. III) を m_K^i としたときの i に等しく，$sw(\rho)$ は $i - e_{L/K} + 1$ （$e_{L/K}$ は L/K の分岐指数）に等しいという関係がある．)

このように困難があるが，剰余体が完全体でない完備離散付値体の分岐という分野では　三木博雄氏のすぐれた研究があり（例えば [M]），§1 の理論とは別の秩序が感じられ，
何か存在していることが
三木博雄氏の影響を受けた筆者にとって生涯の夢を感ずる分野である．

§3．Serre の予想．

§2 の (2) に述べた高次元の局所環の分岐については，[S_0] において Serre が次のような予想を述べている．A を剰余体が完全である正則局所環，G を A の自己同型からなる有限群で，次の条件 (i) (ii)　がみたされるとする．

(i)　A の G-不変部分　$A^G = \{x \in A \,;\, \sigma(x) = x \quad \forall \sigma \in G\}$　はネーター環で，A は A^G 上有限生成加群である．(この条件はゆるいもので応用上は常にみたされているといってよい．)

(ii)　$\sigma \in G$ に対し　$\{x - \sigma(x) \,;\, x \in A\}$　の生成する A の ideal を I_σ と書くと，任意の $\sigma \neq 1$ に対し　A/I_σ は長さ有限 A 加群である．

関数 $a : G \to \mathbb{Z}$ を，$\sigma \neq 1$ に対し

$$a(\sigma) = -[k:k'] \operatorname{length}_A (A/I_\sigma)$$

また $a(1) = -\sum_{\substack{\sigma\in G\\ \sigma\neq 1}} a(\sigma)$ ，と定義する．但し k は A の剰余体，k' は A^G の剰余体である．

Serre の予想（[S_0] §6）．上の条件 (i)(ii) のもと，$a : G \to \mathbb{Z}$ は G のある表現の character である．

これは $\dim(A) = 1$ の時は §1 に述べた事柄に帰着し成立する（$A = O_L$，$G = Gal(L/K)$，$A^G = O_K$ の場合を考える）．

条件 (ii) は $\dim(A) = 1$ のときは必ずみたされるが $\dim(A) \geq 2$ の時は大変きびしい条件で，この Serre の予想は高次元の分岐一般を相手にしているのでなく特別なものだけを考えているのである．

定理（[KSS]）．上の Serre の予想は $\dim(A) = 2$ で A が等標数（つまり A の分数体の標数と剰余体の標数が等しい）ならば成立する．

最近の Bloch の仕事 [Bl] をうまく使えば，この結果は混標数の場合にも拡張されるかもしれない．

§4．類体論，K-理論の可能性

類体論の高次元版（K-理論的類体論）を用いれば，素体上

有限生成な体Kや"高次元局所体"Kについて，$Gal(K^{ab}/K)$ をK群を用いてあらわすことができる（[KS]）．したがってそのような体Kについての1次の表現 $\rho : Gal(K^{ab}/K) \longrightarrow \Lambda^{\times}$ はK群を用いて記述することができ，ρ に関するすべての情報（分岐の度合など）はK群のことばであらわされるはずである．例えば，Kが有限体を剰余体とする完備離散付値体（それは高次元局所体の言い方でいうと1次元局所体である，下の定義参照）の時には，$Gal(K^{ab}/K)$ は $K^{\times} = K_1(K)$ とほぼ同型になり，§1 に述べたように $\rho : Gal(K^{ab}/K) \longrightarrow \Lambda^{\times}$ の conductor は，ρ がK群 $K^{\times}$ の第 i 単数群をどの i から消すかであらわされるのである．この様にして，特に Galois 群の1次の表現の分岐については，特別に良い分岐理論が類体論やK理論の助けによってできる可能性が生ずるのである．

しかしながら筆者は今の所，分岐の不変量として，本当にK群が必要なものはまだ思いついていない．下に述べる $sw(\rho)$ のように，K理論的類体論から考えて自然に思いつく量ではあるけれども，よく考えていくとK群を用いなくても定義できるものであったという，そういう量しか得ていないのである．けれども筆者の経験から考えると，重要な不変量を発見するための方法として，「類体論を通じてK群で考える」という方式は有益であるし，1次の表現に特別に不変量がうまく

定義できることはまちがいないことであると思われ（次の§5参照），類体論，K-理論の，分岐理論における大きな可能性が信じられるのである．（[Ku] にK群の分岐理論への応用がある．）

定義．Kがd次元局所体であるとは，体の列 $k_0, \cdots, k_d$ で (i) k_0 は有限体，(ii) $1 \leqq i \leqq d$ に対し，k_i は k_{i-1} を剰余体とする完備離散付値体，(iii) $k_d = K$，をみたすものが与えられていることをいう．

Kがd次元局所体である時，ほぼ同型に近い準同型 $K_d^M(K) \to Gal(K^{ab}/K)$ が存在する（[Ka_1]§1）．ここに K_d^M は Milnor の d 次K群であり，任意の体 k に対し次のように定義される．$K_0^M(k) = \mathbb{Z}$，$K_1^M(k) = k^\times$，$q \geqq 2$ に対して

$$K_q^M(k) = (\underbrace{k^\times \otimes \cdots \otimes k^\times}_{q\text{コ}})/J$$

ここに J は $x_1 \otimes \cdots \otimes x_q$ であるi≠jについて $x_i + x_j = 1$ となるもの全体が生成する，テンソル積の部分群である．$K_q^M(k)$ の元 $a_1 \otimes \cdots \otimes a_q \bmod J$ は $\{a_1, \cdots, a_q\}$ と書かれる．

定義．離散付値体 k と $q, i \geqq 1$ に対し，$K_q^M(k)$ の第 i 単数群 $U^i K_q^M(k)$ を，

$$\{a, b_1, \cdots, b_{q-1}\} \qquad (a \in U_k^{(i)},\quad b_1, \cdots, b_{q-1} \in k^\times)$$

の形の元全体が生成する $K_q^M(k)$ の部分群とする．

今Kをd次元局所体とし，$d \geqq 1$ とする．Kはともかく

完備離散付値体であるから，$U^i K_d^M(K)$ $(i \geq 1)$ が定義される.

定義. Kをd次元局所体，$d \geq 1$ とする時，$\rho : Gal(K^{ab}/K) \longrightarrow \Lambda^\times$ に対し $sw(\rho)$を，合成写像 $K_d^M(K) \to Gal(K^{ab}/K) \xrightarrow{\rho} \Lambda^\times$ が $U^{i+1} K_d^M(K)$ を零化する最小の整数 $i \geq 0$ と定義する.

これは 古典的局所類体論($d=1$の場合) からみて自然な不変量である(§1 参照.) [Br] §2では，2次元局所体の場合のこの $sw(\rho)$ が重要な役割をはたしている.

§5. 1次の表現の swan conductor.

一般にKを完備離散付値体とする時，剰余体が完全体でなくても，1次の表現 $\rho : Gal(K^{ab}/K) \longrightarrow \Lambda^\times$ に対し $sw(\rho)$ (0以上の整数である) が定義でき，高次元局所体の場合には §4 に与えた $sw(\rho)$ に一致する. $\Lambda^\times$内の1の巾根全体の群と $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ の間の同型により，ρ は homomorphism $Gal(K^{ab}/K) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ すなわち Galois cohomology 群 $H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ の元と見られるが，$H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ に増加 filtration fil_n $(n \geq 0)$ で $\bigcup_{n \geq 0} fil_n =$ 全体 なるものが定義され，$sw(\rho)$ が $\rho \in fil_n$ なる最小の $n \geq 0$ と定義されるのである. d次元局所体 $(d \geq 1)$ の場合には，fil_n は $U^{n+1} K_d^M(K)$ の零化域である. 一般のKに対しては，fil_n の定義はあまり見やすいものではないので，§10 に定義

を移すことにする．もっと一般に Galois cohomology 群 $H^q(K, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(q-1))$ の上に自然な増加 filtration が定義され，この群の元に対しその swan conductor が同様に定義されるのである．

§6．兵頭の不等式，兵頭の有限性定理．

Kを完備離散付値体とするとき，§5 に述べた，1次の表現に対する $sw(\rho)$ は，一般に §1 におけるような s : $Gal(L/K) \longrightarrow \mathbb{Z}$ を用いて定義されるものになっていない．しかしながら §4 に述べた類体論との関係や §8 に述べることなどから重要な量と思われるのである．

この $sw(\rho)$ と discriminant の間に，§1で述べた古典的な場合の関係は成立しない．しかし次のような兵頭の不等式（[Hy] Th.(1.5)）が存在する．

定理（[Hy]）．Kを完備離散付値体，L/Kを有限次アーベル拡大とし，その discriminant ideal を m_K^i とすると，

$$i - e_{L/K} + 1 \geq \sum_{\rho} sw(\rho).$$

ここに $e_{L/K}$ は L/Kの分岐指数，ρ はすべての準同型 $Gal(L/K) \longrightarrow \Lambda^\times$ を走る．

（剰余体が完全体の時は上の不等式は等式になる．）

兵頭氏は，この定理と，K理論的類体論を組み合わせるこ

とにより，次の Hermite-Minkowski 型の有限性定理を得た．

定理．X を $\mathbb{Z}$ 上の projective normal 連結 scheme とし，K をその函数体とする．K の有限次分離拡大 L に対し，X 上に "discriminant divisor" $D_{L/K}$ を $D_{L/K} = \sum_{\mathfrak{p}} i_{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{p}$，ここに $\mathfrak{p}$ は X の余次元 1 の点を走り $i_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}$ は離散付値環 $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ についての L/K の discriminant ideal が $(m_{\mathfrak{p}})^{i_{\mathfrak{p}}}$ である時の $i_{\mathfrak{p}}$，と定義する．また C を X 上の fix された因子とする．この時，K の標数が 0（resp. $p>0$）なら，$D_{L/K} \leqq [L:K]C$ なる K のアーベル拡大 L の個数（resp. K のアーベル拡大 L についての合成体 $\bar{\mathbb{F}}_p L$ の個数）は有限である．

注．この結果は L/K をアーベル拡大に限らないと，$X = \mathrm{Spec}$（代数体の整数環）の場合でも成立しない．したがってこれは本質的に類体論的な定理であると思われる．

§7. Associated differential.

K を完備離散付値体，F をその剰余体とする．この時，§5 に述べた $H^q(K, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(q-1))$ の filtration fil_n $(n \geqq 0)$ について $\mathrm{gr}_n = \mathrm{fil}_n / \mathrm{fil}_{n-1}$ とおく．

定理．([Ka3]). (1) $\mathrm{fil}_0 \cong H^q(F, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(q-1)) \oplus H^{q-1}(F, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(q-2))$.

(2) $n \geqq 1$ に対し K の素元を決めたときに定まる単射準

同型 $gr_n \xrightarrow{\subseteq} \Omega^q_{F/\mathbb{Z}} \oplus \Omega^{q-1}_{F/\mathbb{Z}}$ が存在する. ここに $\Omega^{\cdot}_{F/\mathbb{Z}}$ は F の de Rham complex.

((2) については §10 参照.) 特に $H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ については $gr_n \xrightarrow{\subseteq} \Omega^1_{F/\mathbb{Z}} \oplus F$ $(n \geq 1)$ であり, したがって $\rho : Gal(K^{ab}/K) \to \Lambda^{\times}$ が $sw(\rho) \geq 1$ をみたせば (これは ρ が tame でないことと同値), ρ の $gr_{sw(\rho)}$ での類の $\Omega^1_{F/\mathbb{Z}} \oplus F$ での像を考えることにより non-zero な元 $rsw_\pi(\rho) \in \Omega^1_{F/\mathbb{Z}} \oplus F$ を得る. (rsw は refined Swan conductor の意.)

剰余体が完全体でない完備離散付値体の分岐に剰余体の微分が活躍することは, すでにかなり前に伊原 [I] において見られていることであり, この $rsw_\pi(\rho)$ は [I] にあらわれる "associated differential" に実際に関係がある ([Ka$_2$] §2, [Ka$_3$] §6).

$rsw_\pi(\rho)$ を用いて, X を正則, 連結なる excellent scheme, U をその開集合で $D = (X-U)_{red}$ が X の normal crossing の divisor なるものとし, K を (この節の初めと異なり) X の函数体とし $\rho : Gal(K^{ab}/K) \to \Lambda^{\times}$ を U 上不分岐な1次の表現とする時, 「triple (X, U, ρ) が clean かどうか」(定義はやっかいなので §10 に与える) ということが定義できる.

<u>予想</u> 上のような (X, U, ρ) に対し, proper birational な morphism $f : X' \to X$ で, X' も regular, $f^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U$,

$(X' - f^{-1}(U))_{red}$ が X' の normal crossing divisor となるものが存在して，$(X', f^{-1}(U), \rho)$ が clean となる．

定理．この予想は $\dim(X) = 2$ なら成立する．

§8．ℓ 進層の Riemann-Roch，$\mathcal{D}$ 加群との類似．

k を代数閉体，X を k 上の proper smooth variety，U を X の開集合で $D = (X-U)_{red}$ が X の normal crossing divisor となるものとする．

K を X の函数体とし，ℓ を k の標数と異なる素数とし，$\rho : Gal(K^{ab}/K) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ で U 上不分岐なものを考える．ρ は U 上の rank 1 の smooth $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-sheaf $\mathcal{F}_\rho$ を与える．

予想．(rank 1 の ℓ 進層の Riemann-Roch.) (X, U, ρ) が clean なら，

$$\chi(U, \mathcal{F}_\rho) = \sum_{i=0}^{\dim(X)} (-1)^i \chi(X, \Omega^i_{X/k}(\log D)(i \cdot \underline{sw}_X(\rho)))$$

ここに $\underline{sw}_X(\rho)$ は X 上の因子 $\sum_{\mathfrak{p}} sw_\mathfrak{p}(\rho)\cdot\mathfrak{p}$（$\mathfrak{p}$ は X の余次元 1 の点を走り $sw_\mathfrak{p}(\rho)$ は $\mathfrak{p}$ における §5 の意味での Swan conductor.）なおこの右辺は Riemann-Roch らしく Chow 環のことばで書くと，Chow 環 $CH^*(X)$ の中での商 $\dfrac{c(X,U)}{1+\underline{sw}_X(\rho)}$（ここに $c(X,U)$ は $\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X/k}(\log D), \mathcal{O}_X)$ の total chern class）の $CH_0(X)$-成分の degree に等しい．

kが標数0ならこの予想は成立し，興味がない．（その時は $\chi(U,\mathcal{F}_p)$ は $\mathcal{F}_p$ に依らず $\chi(U,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ に等しく，(X,U,ρ) は常に clean，$\underline{\mathrm{sw}}_X(\rho)=0$ となる．）

<u>定理</u>．予想は $\mathrm{char}(k)=p>0$，$\dim(X)=2$ で，かつ ρ の位数が p^2 でわりきれなければ成立する．

上の予想は，標数0の $\mathcal{D}$ 加群（$\mathcal{D}$ は微分作用素の層）での類似から生ずるものである．k の標数を0とし，$\mathcal{L}$ を $\mathcal{D}_U$ 加群で $\mathcal{O}_U$ 加群として可逆層であるものとする．$(X,U,\mathcal{L})$ が clean であるとは，$j: U \subseteq X$ を inclusion map とするとき，X の各点 x について e を $(j_*\mathcal{O}_U)_x$ 加群 $(j_*\mathcal{L})_x$ の base，$\nabla(e)=e\otimes\omega$ （∇ は $\mathcal{D}_U$ 加群構造に伴う connection，$\omega\in(j_*\Omega^1_{U/k})_x$ ）とおくと，$\omega\in\Omega^1_{X/k}(\log D)_x$ であるか，または或る $g\in\mathcal{O}_{X,x}$ があって $g\omega$ が $\mathcal{O}_{X,x}$ 加群 $\Omega^1_{X/k}(\log D)_x$ の base の1部となることである．

<u>命題</u>．$(X,U,\mathcal{L})$ に対し，proper birational な morphism $f: X'\to X$ で，X' も regular，$f^{-1}(U)\cong U$，$(X'-f^{-1}(U))_{\mathrm{red}}$ が X' の normal crossing divisor となるものが存在して，$(X',f^{-1}(U),f^*(\mathcal{L}))$ が clean となる．

<u>命題</u>　$(X,U,\mathcal{L})$ が clean ならば，$\chi(U,DR(\mathcal{L}))$ は上の予想の右辺の $\underline{\mathrm{sw}}_X(\rho)$ を因子 $\underline{\mathrm{Irr}}(\mathcal{L})$ におきかえたものに等しい．

ここに $DR(\mathcal{L})$ は $\mathcal{L}$ に伴う complex $(\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_U}\Omega^{\cdot}_{U/k},\nabla)$，

$\underline{\mathrm{Irr}}(\mathcal{L}) = \sum_{p} n_p p$ （p は X の余次元 1 の点を走る）で，n_p は点 p において e, ω を上のようにとるとき，$\omega \in \Omega^1_{X/k}(\log D)_p$ なら $n_p = 0$，そうでなければ，上の g の p での order である.

とにかく，通常の連接層の Riemann-Roch 定理には類体論など出る幕もなかったのであるが，ℓ 進層の Riemann-Roch の方は，類体論と深く結びついている §5 の Swan conductor がかかわるということが，楽しいことに思われるのである.

なお ℓ 進層の Riemann-Roch については Laumon [L]，S. Saito [Sa] も参照されたい.

§7. 特異点の解消

分岐理論は特異点の研究に次のように関係するはずである. X を regular 連結，K をその函数体，Y を K の有限次拡大体 L における X の整閉包とするとき，Y の特異性は covering Y → X の分岐の様子から測られるはずである.

これまでに述べたことを用いて 2 次元 excellent scheme の特異点の解消が可能であるという定理（広中 [Hi]，Abhyankar [A]）の別証を与えることができる.（方針のみ述べる.）Y という 2 次元 excellent scheme の特異点を解消したいとせよ. 問題を，Y が上のような regular な X についての素数次巡回

拡大 L/K から得られるものである場合に，帰着することができる．単射準同型 $\rho : \mathrm{Gal}(L/K) \longrightarrow \Lambda^{\times}$ をとり，これに §7 の最後の「clean 化可能定理」を適用することにより，次の状況にもちこむことができる；X の開集合 U があって $(X-U)_{red}$ が normal crossing の divisor，U 上 Y は不分岐，そして (X, U, ρ) は clean．この状況のもとでは，Y はあまり特異性がなく，ありうる特異点も解消しやすいタイプのものになり，特異点解消の可能なることが示せるのである．

§10．補足

今まで説明のややこしくなる所をあとまわしにしてきた（§5 に述べた filtration の定義，§7 の $gr_n \hookrightarrow \Omega^q_{F/\mathbb{Z}} \oplus \Omega^{q-1}_{F/\mathbb{Z}}$ の定義と clean の定義）が，それらをここで説明する．

k を体とする時 $H^q(k, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(q-1))$ を $H^q(k)$ と書く．標準的 pairing $\{\ ,\ \} : H^q(k) \otimes k^{\times} \to H^{q+1}(k)$ が存在する．（群 $H^q(k)$ とその重要性については [Ka4] 参照．）

命題．K を完備離散付値体，$\rho \in H^q(K)$，$n \geqq 0$ とする．π を K の素元とする．この時次の (i) (ii) は同値．

(i) K を含む完備離散付値体 K' で，$O_K \subset O_{K'}$，$m_K \subset m_{K'}$ なる任意のものに対し，$\{\rho, 1 + m_K^{n+1} O_{K'}\} = 0$ in $H^{q+1}(K')$．

(ii) $O_K[T]$ の m_K で生成される素 ideal における局所環を完備化して得られる完備離散付値環の分数体を K' とする時,

$\{\rho, 1+\pi^{n+1}T\} = 0$ in $H^{q+1}(K')$.

定義. $n \geq 0$ に対し, 上の同値な (i)(ii) をみたす $\rho \in H^q(K)$ 全体のなす $H^q(K)$ の部分群を fil_n と定義する. K の剰余体 F の標数が 0 であれば, $H^q(K) = \mathrm{fil}_0$ となる.

命題. F の標数を $p > 0$ とし, $\rho \in \mathrm{fil}_n$, $n \geq 1$ とする. K' を上の命題の (ii) のとおりとすると,

$$\{\rho, 1+\pi^n T\} = \iota(T\alpha) + \{\iota(T\beta), \pi\} \quad \text{in } H^{q+1}(K')$$

となる組 $(\alpha, \beta) \in \Omega^q_{F/\mathbb{Z}} \oplus \Omega^{q-1}_{F/\mathbb{Z}}$ が唯一つ存在する. ここに $\iota : \Omega^*_{F(T)} \longrightarrow H^{*+1}(K')$ は次のような自然な準同型である.

K' の剰余体は $F(T)$ であるが, 一般に剰余体 F をもつ完備離散付値体 K に対し標準"もちあげ"写像 $H^*(F) \longrightarrow H^*(K)$ が存在し, また標数 $p > 0$ の体 k に対し $\Omega^*_{k/\mathbb{Z}}$ から「$H^{*+1}(k)$ の p 倍で消える所」への標準全射が存在する ([Ka5]). ι は合成写像 $\Omega^*_{F(T)} \to H^{*+1}(F(T)) \longrightarrow H^{*+1}(K')$ である. ($gr_n \to \Omega^q_{F/\mathbb{Z}} \oplus \Omega^{q-1}_{F/\mathbb{Z}}$ は, $\rho \mapsto (\alpha, \beta)$.)

最後に clean の定義をおこなう. X, U, D, K を §7 の末のとおりとし $\rho \in H^q(K)$ とし $\mathfrak{p}$ を X の余次元 1 の点で $\mathrm{sw}_{\mathfrak{p}}(\rho) \geq 1$ なるものとし $x \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}$ ($= \{\mathfrak{p}\}$ の閉包, reduced scheme と見る) とする. $\pi_1, \cdots, \pi_r$ を $\mathcal{O}_{X,x}$ の素元で互いに同値でなく, D が x において $\bigcup_{i=1}^{r}$ "$\pi_i = 0$ の所" と書け, かつ

$\overline{\{p\}}$ が x において "$\pi_1 = 0$ の所" になるようにとる. この時,

命題. $\overline{\{p\}}$ 上の divisor D' を, $\overline{\{p\}}$ と, D の $\overline{\{p\}}$ 以外の既約成分全体の合併の, 交わりと定義する. この時, $\mathrm{rsw}_{\pi_1}(\rho) \in \Omega^q_{k(p)/\mathbb{Z}} \oplus \Omega^{q-1}_{k(p)/\mathbb{Z}}$ ($k(p)$ は p の剰余体) は, ある $\alpha, \beta \in \Omega^*_{\overline{\{p\}}/\mathbb{Z}}(\log D')_x$ によって

$$\left(\left(\prod_{i=2}^{r} \pi_i^{n_i}\right)^{-1} \alpha,\ \left(\prod_{i=2}^{r} \pi_i^{n_i}\right)^{-1} \beta \right) \qquad n_i = \mathrm{sw}_{(\pi_i)}(\rho)$$

の形に書ける.

(X, U, ρ) が clean とは, $\mathrm{sw}_p(\rho) \geq 1$ なる X の余次元 1 の任意の点 p と任意の $x \in \overline{\{p\}}$ について, 上の α, β のいずれかが自由 $\mathcal{O}_{\overline{\{p\}},x}$ 加群 $\Omega^*_{\overline{\{p\}}/\mathbb{Z}}(\log D')_x$ の base の1部になることである.

最近物理学の4つの力の統一が言われ, 黒川信重氏はこれを整数論の4つのゼータの統一に結びつけておられる. それをまねていうならば, 4人の偉大なかたの力の統一が望まれるのである. 高木貞治さん (類体論), 小平邦彦さん (Riemann-Roch), 広中平祐さん (特異点解消), 佐藤幹夫さん ($\mathcal{D}$ 加群) の4人のかたの力が, 高次元の分岐をあきらかにすると思われるのである.

文献

[A] Abhyankar, S., Resolution of singularities of arithmetic surfaces, in Arithmetical Alg. Geometry, Harper & Row.

[Bl] Bloch, S., Cycles on arithmetic schemes and Euler characteristics of curves, preprint.

[Br] Brylinski, J.-L. Théorie du corps de classes de Kato et revêtements abéliens de surfaces, Ann. Inst. Fourier, 1983.

[Hi] Hironaka, H., Desingularization of excellent surfaces, in Lecture Notes in Math. 1101, Springer.

[Hy] Hyodo, O., Wild ramification in the imperfect residue field case, to appear in Advanced Studies in Pure Math. 12.

[I] Ihara, Y., On the differentials associated to congruence relations and the Schwarzian equations defining uniformizations, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1974.

[Ka_1] Kato, K., Algebraic K-theory and class field theory, in Lecture Notes in Math. 1016, Springer

[Ka_2] Kato, K., Swan conductors with differential values, to appear in Advanced Studies in Pure Math. 12.

[Ka_3] Kato, K., Swan conductors for characters of degree one in the imperfect residue field case, preprint.

[Ka_4] Kato, K., A Hasse principle for two dimensional global fields, Crelle, 1986.

[Ka_5] Kato, K., Galois cohomology of complete discrete valuation fields, in Lecture Notes in Math. 967, Springer

[KS] Kato, K. and Saito, S., Global class field theory of arithmetic schemes, in Contemporary Math. 55. I.

[KSS] Kato, K., Saito, S., Saito, T., Artin characters for algebraic surfaces, to appear in Amer. J. Math.

[Ku] Kurihara, M., On two types of complete discrete valuation fields, preprint, Univ. of Tokyo.

[L] Laumon, G., Caractéristique d'Euler-Poincaré des faisceaux constructibles sur une surface, Astérisque 101-102, 1983.

[M] Miki, H., On $\mathbb{Z}_p$-extensions of complete p-adic power series fields and function fields, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1974.

[Sa] Saito, S., Generalized trace formula for algebraic surfaces and the theory of Swan representations for two dimensional local rings, preprint.

[S_0] Serre, J.-P., Sur la rationalité des représentations d'Artin, Ann. of Math. 72, 1960.

[S_1] Serre, J.-P., Corps Locaux.

[S_2] Serre, J.-P., 有限群の線型表現, 岩波.